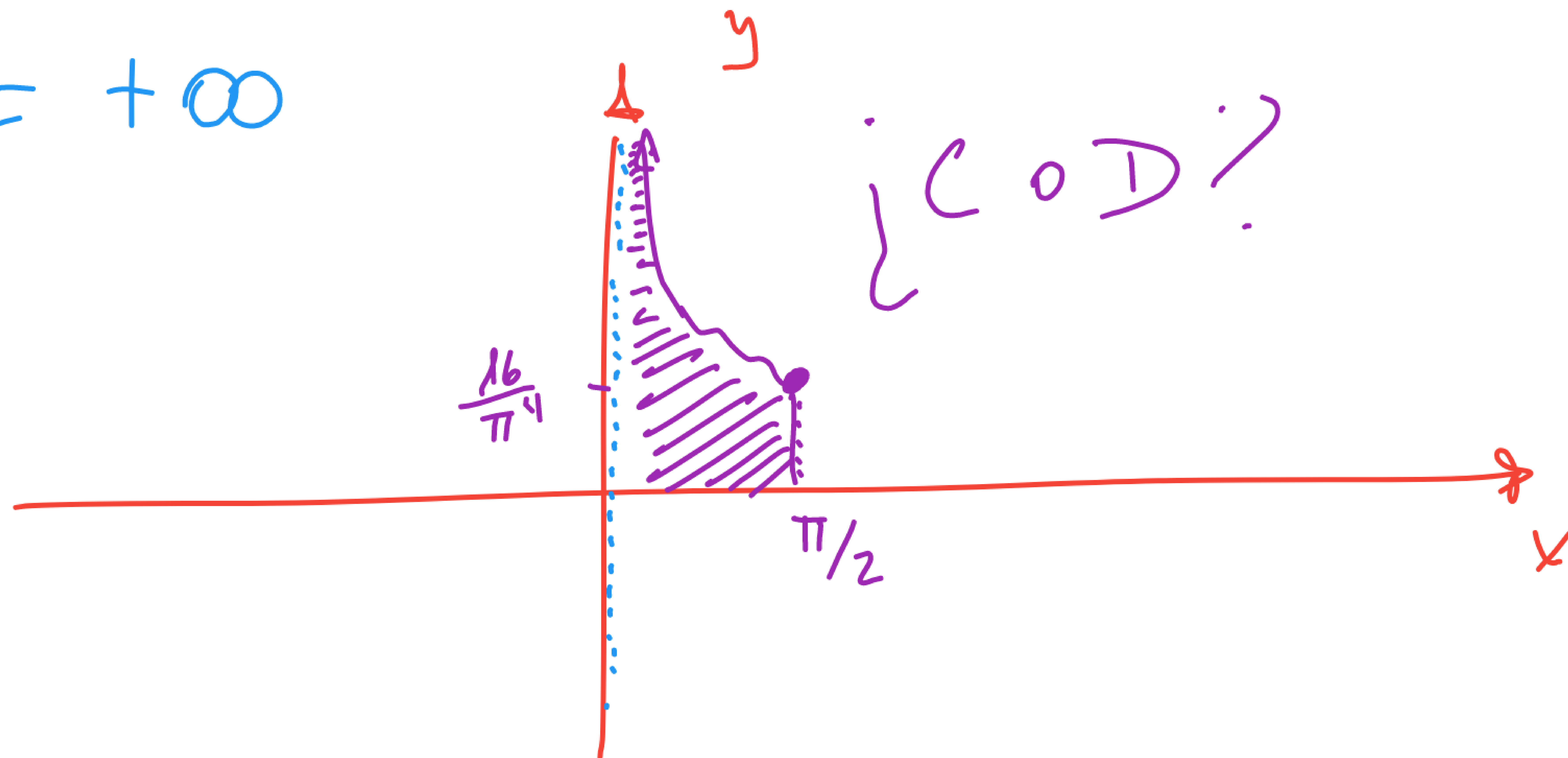
viernes, 10 de junio de 2022

$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^4}$ continua en $]0, \frac{\pi}{2}]$ $\left(f(x) \geq 0 \ \forall x \in]0, \pi/2] \right)$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x^4} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{x^3} \right)$$

$$= +\infty$$



Sigo investigando

Como $f(x) = \frac{\text{Sen } x}{x^4} \geq 0 \quad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ y es cont.

en $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ podemos aplicar crit. de comparación

por límite con la función $g(x) = \frac{1}{x^p} \geq 0, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

Con $p > 0$, de la cual se conoce que:

- Si $0 < p < 1$ Converge
- Si $p \geq 1$ diverge

En efecto:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{\text{Sen } x}{x^4}}{\boxed{\frac{1}{x^p}}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^p \text{Sen } x}{x^4} \right) = 1 \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$$

si $p = 3$

Como $p = 3 \geq 1 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} g(x)\,dx$ diverge

$\therefore$ también diverge $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4}\,dx$

Note que :

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{x^p \cdot \operatorname{sen} x}{x^4} \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^3} \right]$$

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^3} \right] \Rightarrow$$

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x^4}}{\left(\frac{1}{x^p}\right)} \right]$$

Si $P = 3 \Rightarrow L = 1$ $\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$ Diverge

Si $p > 3 \Rightarrow L = 0$, como $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^p} dx$ divergen para $p \geq 1 \Rightarrow$ el criterio NO APLICA

Si $p < 3 \Rightarrow L = \infty$, como $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^p} dx$ diverge para $p \geq 1 \Rightarrow$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$ DIVERGE tomando $p \in [1, 3[$

Integrales Eulerianas

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Converge $\forall\, p>0$

Propiedades:

① $\Gamma(1) = 1$

En efecto:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \to \infty} \left[-e^{-x} \Big/_0^a \right. = \lim_{a \to \infty} \left[-\frac{1}{e^a} + 1 \right] = 1$$

② $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$, $\forall\, p>1$

Prueba:

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

Para $p > 1$:

$$\Gamma(p) = \lim_{a \to \infty} \Big[\underbrace{\int_0^{a} x^{p-1} e^{-x}\, dx}_{A} \Big]$$

$$A = \int_0^{a} x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

Sea $u = x^{p-1} \Rightarrow du = (p-1)\, x^{p-2}\, dx$

$dv = e^{-x}\, dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$$A = \left(-e^{-x} \cdot x^{p-1}\right/_{0}^{a} + \int_0^a (p-1)\, x^{p-2} e^{-x}\, dx$$

$$A = \left(-\frac{a^{p-1}}{e^{a}} + \underbrace{e^{0} \cdot 0^{p-1}}_{0}\right) + \int_0^a (p-1)\, x^{p-2} e^{-x}\, dx$$

pues $p-1>0$
$p>1$

Luego:

$$\Gamma(p) = \lim_{a\to\infty}\left[-\frac{a^{p-1}}{e^{a}} + (p-1)\int_0^a x^{(p-1)-1} e^{-x}\, dx\right]$$

Por un lado: i) $\lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a x^{(p-1)-1} e^{-x}\, dx\right) := \int_0^\infty x^{(p-1)-1} e^{-x}\, dx := \Gamma(p-1)$

para $p>1$

ii) $\lim_{a \to \infty} \left(- \frac{a^{p-1}}{e^{a}} \right) = L \,, \quad p > 1$

Por L'Hôpital :

$$L = \lim_{a \to \infty} \left(- \frac{(p-1)\, a^{p-2}}{e^{a}} \right)$$

Se puede seguir aplicando L'Hôpitall hastaque a^{p-m} baje al denominador y entonces evaluamos

$$L = 0$$

$$\therefore \quad \Gamma(p) = 0 + (p-1)\,\Gamma(p-1)$$

$$\boxed{\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1) \qquad \forall \; p > 1}$$